D'où : $\mathscr{A}(\alpha)=\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha^2\text{Log}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\text{Log}(\alpha+1)\right]$ u.a.

b- $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\mathscr{A}(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha^2\text{Log}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\text{Log}(\alpha+1)\right]$

$=\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha f(\alpha)-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\text{Log}(\alpha+1)\right]=\frac{1}{2}$.

B-1/ $(C')=S_\Delta[(C)]$ avec $\Delta : x=-\frac{1}{2}$. (voir figure)

2/a- $\Delta : x=-\frac{1}{2} \Rightarrow \vec{j}$ est un vecteur directeur de Δ.

$M(x,y)$ et $M'(x',y')$ deux points du plan P.

$M'=S_\Delta(M) \Leftrightarrow \Delta=\text{med}[MM']$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(M*M')\in\Delta\\(MM')\perp\Delta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(M*M')\in\Delta\\\overrightarrow{MM'}\perp\vec{j}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x+x'}{2}=-\frac{1}{2}\ (\text{abscisse de } M*M')\\(x'-x)\times 0+(y'-y)\times 1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x'=-x-1\\y'=y\end{cases}$$

b- • $x\in D^* \Leftrightarrow x<-1$ ou $x>0 \Leftrightarrow -x>1$ ou $-x<0$

$\Leftrightarrow -x-1>1-1=0$ ou $-x-1<0-1=-1$

$\Leftrightarrow (-x-1)\in D^*$.

• Soit $M(x,y)$ tel que $x\in D^*$ d'image $M'(x',y')$ par S_Δ

$M'(x',y')\in(C')=S_\Delta((C)) \Leftrightarrow M(x,y)\in(C)$

$\Leftrightarrow y=f(x)$ car déjà $x\in D^*$

$$\Leftrightarrow y'=f(-x'-1) \quad \text{car} \begin{cases}x'=-x-1\\y'=y\end{cases}$$

Conclusion : $M(x,y)\in(C') \Leftrightarrow y=f(-x-1)$ et $x\in D^*$.

c- $(C') : \begin{cases}x\in D^*\\y=f(-x-1)\end{cases}$ d'autre part $(C') : \begin{cases}x\in D^*\\y=g(x)\end{cases}$

$\Rightarrow \forall x\in D^*; g(x)=f(-x-1)=(-x-1)\text{Log}\left[1+\frac{1}{-x-1}\right]$

$=-(x+1)\text{Log}\left[\frac{-x-1+1}{-x-1}\right]$

$=-(x+1)\text{Log}\left[\frac{-x}{-x-1}\right]=-(x+1)\text{Log}\left[\frac{x}{x+1}\right]$

$=-(x+1)\left[-\text{Log}\left[\frac{x+1}{x}\right]\right]=(x+1)\text{Log}\left[1+\frac{1}{x}\right]$.

C-1/ On a $\forall n\in IN^*; f(n)<1$ car 1 est le maximum absolu de f

$\star\ \forall n\in IN^*; g(n)=f(-n-1)$

$n>0 \Leftrightarrow -n-1<-1$

$\Rightarrow g(n)=f(-n-1)>1$ car 1 est le minimum de f sur $]-\infty;-1[$

En conclusion : $\forall n\in IN^*; f(n)<1<g(n)$.